Solución fallida al Desafío 94
El Rally (por Rubenman)

Paquito Superpanzeta
Club Pitagóricos, 10 de febrero de 2014

Capítulo I - El viaje a ninguna parte

Versículo I - Me voy de la olla

Este Desafío me ha resultado más difícil de lo que esperaba. No hay conceptos complicados que entender, pero sí hay muchas opciones que contemplar y tengo que reconocer que no se me ha dado bien. Lo considero fallido (al menos parcialmente) por mi parte, porque de no haber sido guiado por el Desafiante no habría cruzado el desierto.

Según el Jefe, la respuesta que he obtenido es correcta, pero no estoy satisfecho con ella porque además de haber necesitado un empujón para salir del atasco arenoso en que estaba, no he conseguido demostrar que sea la mínima. Por h o por b, no he terminado de contemplar todas las posibilidades, y aunque no dudo de que la solución sea óptima (si lo dice el Jefe, seguro que es así), no es completa.

Lo que sigue incluye algunos de los desvaríos que me llevaron a la meta. Y digo algunos porque ha sido imposible ponerlos todos. He gastado más papel que en ningún otro Desafío, y esto ya os dará una idea del cacao mental que llevo encima. Encontré la solución antes del fin de semana, y pensaba haberla completado demostrándolo todo y pasándola a limpio entre el Sábado y el Domingo. No ha podido ser. Habría necesitado más tiempo. Ni siquiera he conseguido dibujar unos diagramas aceptables. Ya que esta semana voy de tardes, he intentado hacer los diagramas en el último momento, el Lunes por la mañana. No me han quedado bien. Al final he pensado que era demasiado esfuerzo para algo tan sencillo que se puede entender sin diagramas, así que los he abandonado a última hora junto con el tiempo les que había dedicado. Debido a ello, en lo que sigue no hay diagramas. Todo está bastante resumido (aunque no lo parezca, he hecho un esfuerzo), así que es posible que sea algo difícil de seguir. En definitiva, os recomiendo que no leáis nada y saltéis al final. Estáis avisados.

Lo que sí he intentado es demostrar que son necesarios 3 puntos de abastecimiento. Empecé directamente por esa configuración porque me pareció lo más natural después de pensar un poco en ello y manchar unos papeles. Pero una vez encontrada la solución, quise completarla con la demostración de que es en realidad la mínima. No lo he conseguido, así que no esperéis una gran explicación.

Motores en marcha

Para empezar el rally, lo primero que se me ocurrió fue normalizar las cantidades. La idea consiste en igualar las distancias y el combustible empleado en recorrerlas por medio de un cambio simple de unidades. Para ello, introducimos la unidad de combustible uc, que no es otra cosa que litros/25, y la unidad de distancia ud, que no es otra cosa que Km/250. Con estas unidades, la capacidad total del depósito es de 4, lo que permite viajar una distancia de 4, y la meta está a distancia 6,4 de la salida.

El problema se reduce a encontrar la forma de alcanzar un lugar M a 2,4 ud de la salida (a 4 ud de la meta), teniendo el depósito lleno (4 uc). A partir de esta meta secundaria, sólo hay que gastar las 4 unidades de combustible y llegar a la meta real.

Después de un par de pruebas en que me perdí al ir anotando el combustible que iba quedando y el almacenado, me pareció claro (sólo era una sensación) que iba a necesitar 3 puntos de abastecimiento. La primera estrategia que completé usaba 3 puntos y gastaba 14,8 uc = 370 litros. El desafiante me dijo que se podía mejorar, lo que no me resultó extraño porque había puesto los puntos al tun tún. Para no tener que empezar a mover los puntos ligeramente para ver en qué dirección mejoraba, pasé a intentar razonar.

El Jefe ya me había dicho que no estaba lejos y que casi todo era correcto, ya que sólo fallaba la colocación de los dos primeros puntos. Con este conocimiento tramposo, mis razonamientos se dirigieron exclusivamente al caso de 3 puntos de abastecimiento, pero como me quedaba la sensación de que había que había que considerar otras opciones para descartarlas, aquí está mi razonamiento a posteriori (después de haber encontrado la respuesta) del por qué hay que usar 3 puntos.

Razonando a posteriori

Salta a la vista que $4 < 6{,}4$, así que el viaje directo es imposible. O lo que es lo mismo, si viajamos al punto M, nos quedarán 1,6 uc y lo que necesitamos son 4.

Un punto

Veamos qué pasa si utilizamos un punto de abastecimiento. Con un punto de abastecimiento, necesitaríamos dos viajes: uno para abastecer el punto y volver, y otro para el recorrido final hasta la meta. La máxima distancia posible entre la salida y el punto de abastecimiento será de 2, lo que nos dejaría sin posibilidades de abastecer el punto (ya que de un total de 4, gastamos 2 para llegar y necesitamos otros 2 para volver). El punto deberá estar, pues a una distancia inferior a 2.

Si llamamos x a la distancia del punto de abastecimiento, la cantidad máxima de combustible que se puede dejar almacenada en ese punto será $4-2x$. En el viaje final, si partimos con el depósito lleno (4 uc), llegaremos al punto de abastecimiento con $4-x$ uc. Recogiendo todo lo almacenado, tendremos un total de $4-x+4-2x = 8-3x$ uc. Para llegar al punto M, nos faltan recorrer $2{,}4-x$ ud, así que lo que hace falta es que $8-3x-(2{,}4-x) = 4$. Despejando, obtenemos una $x = 0{,}8$.

Las cuentas cuadran; veamos qué pasa en la práctica. Salimos con 4, viajamos 0,8 y llegamos con 3,2. Almacenamos 2,4 y nos quedan 0,8 justos para volver a la salida. Abastecimiento ok.

Viaje final: salimos con 4, viajamos 0,8 y llegamos con 3,2. Recuperamos los 2,4 y tenemos 5,6. Gastamos 1,6 en llegar al punto M, y tenemos 4, lo justo para acabar la carrera. La carrera a ninguna parte, ya que hemos cargado 5,6 y no podemos llevar más de 4. Si cargamos el máximo permitido de 4, cuando lleguemos a M estaremos cortos de combustible para acabar. Conclusión: con un punto de abastecimiento también es imposible.

Visto de otro modo, tarde o temprano tendremos que pasar por M, y cuando lleguemos allí vamos a necesitar un total de 4 uc, así que , dado que no podemos acarrear más de 4, es obvio que el propio punto M tiene que ser un punto de repostaje. Usando una estrategia de un único punto de repostaje, si lo colocamos en M (a distancia 2,4 de la salida), no podremos abastecerlo, ya que $2{,}4 > 2$. Sea como sea, necesitamos más puntos. Uno no es suficiente.

Dos puntos

Probemos con dos. Llamaremos x a la distancia de la salida al primer punto. Como es imprescindible que M sea punto de repostaje, lo colocamos ya, y la distancia dentre el primer y el segundo punto será $y = 2{,}4 - x$. Ahora deberemos hacer al menos dos viajes de abastecimiento. Igual que antes, con el primer viaje cargamos el primer punto y dejamos $4 - 2x$. Con el segundo viaje abastecemos M: salimos con 4, gastamos x en llegar al primer punto, reabastecemos x a costa del primer punto (dejamos $4 - 3x$), y volvemos a tener 4. Viajamos $2{,}4 - x$ hasta M y llegamos con $4 - (2{,}4 - x) = 1{,}6 + x$. Descargamos $2x - 0{,}8$ y nos quedan justos $2{,}4 - x$ para volver al primer punto. Recargamos x (dejamos $4 - 4x$) y volvemos con la reserva encendida a la salida. Es imposible abastecer más los dos puntos en dos únicos viajes. ¿Podremos acabar el rally con esto?

Veamos. Salgamos con el máximo posible, 4. Si nos sobra algo al final podríamos bajar esta cifra para ahorrar. Y si no alcanzamos la meta saliendo con el máximo, será porque con dos puntos de almacenamiento y dos viajes previos no se puede acabar. Lo ideal sería que el primer punto (que ahora contiene $4 - 4x$) no estuviera vacío, y que contuviera exactamente el combustible justo para compensar el hueco que hemos creado en el depósito viajando hasta allí. No interesa que haya más porque eso implicaría que dejaríamos combustible sin usar en ese punto y eso penalizaría el consumo total. Muy bien. Supongamos pues, que extraemos x y lo dejamos vacío, volviendo a tener el depósito lleno. Esto nos dice que $4 - 4x = x$, de donde $x = 4/5 = 0{,}8$. Viajamos $2{,}4 - 0{,}8$ hasta M y llegamos con $4 - 2{,}4 + 0{,}8 = 2{,}4$. Recogemos todo lo que haya en M (que será $2x - 0{,}8 = 0{,}8$) y totalizamos $2{,}4 + 3{,}2 = 3{,}2$. Insuficiente, incluso siguiendo la estrategia óptima de mantener mientras se pueda el depósito lleno. Conclusión: con dos puntos y dos viajes previos (tres viajes en total y consumo final de 12) no es suficiente para llegar a la meta.

Con 2 puntos y 3 viajes previos (4 en total), resulta que $4 - 6x = x$, de donde $x = 4/7$, y en M encontramos el "doble" de combustible (no es el doble porque al cambiar x cambian las cantidades), que ahora será $4x - 1{,}6 \approx 0,685$. Lo que necesitamos al llegar a M es algo que compense la distancia $2{,}4 - x \approx 1{,}828$, así que es claramente insuficiente. Conclusión: Con 2 puntos de repostaje y 3 viajes previos + 1 viaje final, no nos alcanza ni aunque gastemos $4 \times 4 = 16$ uc. Como simplemente probando ya hemos visto que se pueden conseguir consumos menores a 15 con 3 puntos de abastecimiento, debemos descartar definitivamente la estrategia de 2 puntos. [1]

[1] Sí, este último "razonamiento" es una porquería, como el interior de mi cabeza.

Tres puntos - Razonamiento inicial

Ya sabía de la probatina inicial que con 3 puntos de aprovisionamiento era posible acabar, así que estaba seguro de que la solución pasaba por aquí.

Repitiendo la estrategia ya vista (acumular lo máximo posible a la máxima distancia posible y volver de vacío), ahora colocaré 3 puntos: el primero a distancia x de la salida, el segundo a distancia y del primero, y el tercero (M), a distancia $z = 2{,}4 - x - y$ del segundo. Tras los 3 viajes de aprovisionamiento, tenemos esto acumulado:

Punto 1:	$4 - 6x$
Punto 2:	$4 - 4y$
Punto M:	$4 - 2z$

Si partimos ahora en el viaje final con 4 (siempre podemos repetir con menos si nos sobra algo), llegaremos al primer punto con $4-x$. Recogiendo x del punto para recuperar lo perdido vaciaremos el primer punto (es lo ideal si estamos minimizando el consumo), de donde obtenemos que $4 - 6x = x$. Despejando, $x = 4/7$.

Repitiendo la jugada al llegar al segundo punto, recuperamos el depósito lleno y obtenemos que $4 - 4y = y$. Despejando, $y = 4/5$, y repitiendo, el último tramo debería ser $z = 4/3$. Estas tres longitudes $x + y + z$ deberían sumar 2,4 pero se pasan porque entre lo que hemos cargado en el último viaje y lo depositado por el camino hay demasiado combustible.

Efectivamente, cuando lleguemos a M, recuperaremos las 4 uc a costa del depósito, lo que nos dejará allí un sobrante de $2x + 2y - 0{,}8 - 2{,}4 + x + y$. Operando y dando a x e y los valores recién calculados, vemos que el superávit final es de aproximadamente 0,914 uc. De haber salido con $4 - 0{,}914 \approx 3{,}085$, habríamos cuadrado las cuentas, pero el resultado final no es nada bueno. Habríamos gastado 12 uc entre los tres primeros viajes, y 3,085 en el último, lo que arroja un total superior a 15 uc (375 litros). Peor que mi primera probatina sin razonamientos.

Este hecho me mantuvo perplejo bastante tiempo, y estaba casi dispuesto a tirar la toalla. Yo pensaba que lo ideal era acumular todo lo posible (saliendo con 4 en todos los viajes previos) y salir más ligero en el último viaje. En el límite, si todo hubiera sido de color de rosa, el último viaje sólo necesitaría empezarse con $x = 4/7$ uc (lo justo para llegar al punto 1), y a partir de ahí vaciar los depósitos hasta alcanzar el punto M con 4. Lo único que hacía falta es que la suma de lo almacenado por el camino más el combustible de salida fuera igual a 6,4, pero las cuentas no cuadraban.

Había que hacer el tramo z (entre el segundo punto y M) tan grande que no se habría podido abastecer. Metiendo los tramos en vereda, el combustible de salida y el consumo total ya no eran buenos.

Volví a las probatinas y bajé enseguida a 14,4 uc (360 litros) haciendo que $2x = y$ (sin ningún buen motivo). Incluso mejoré un poco más al hacer que las distancias entre puntos fueran en progresión geométrica 1,2,4, pero no había base teórica para ello, y la suma final, según el Desafiante, se podía mejorar aún más. Como no tenía ganas de ajustar x e y al azar para buscar el mínimo, y mis ideas no me llevaban a ninguna parte, avisé al Desafiante de que no era nada optimista con las perspectivas.

Y así hubiera acabado mi viaje, en ninguna parte, si no hubiera sido porque el Desafiante me había dicho que él no intentaba ahorrar al final. A mí me pareció que ahorrar al principio iba a ser contraproducente, o como mucho dar lo mismo (de hecho, al Desafiante le pareció que mi sistema de ahorro final probablemente también debería funcionar), pero está claro que estaba equivocado.[2]

El viaje final al otro lado del desierto

Una vez iluminado por los faros de xenon del vehículo de la organización[3], ví que ahorrar al inicio no es difícil. Valen las mismas ecuaciones que ya tenía, cambiando los 4 por otra cosa. El problema es que hay varias opciones. Se puede ahorrar en el primer viaje, en el segundo, en el tercero, en el primero y el segundo, en el primero y el tercero, en el segundo y el tercero, o en todos ellos.

Ahorrar en un sólo punto no es difícil. Se pone una variable q en vez del 4 correspondiente, se hace el viaje final con 4 igualando por el camino lo gastado con lo encontrado, y finalmente se despejan las variables x, y, q. Ahorrar en varios puntos ya no es fácil. Al tener más de una variable ya no sé hacerlo, a no ser suponiendo por el morro que sus valores sean iguales. Estuve calculando q para cada uno de los viajes por separado y también por parejas y el trío igualando todas las variables. El mejor resultado, con diferencia, era aquel en que se ahorraba sólo en el primer viaje. Aquí están las ecuaciones de la cantidad acumulada en los tres puntos antes del último viaje, ahorrando (usando q) sólo en el primer aprovisionamiento:

[2] He dejado que la frase fuese ambigua intencionadamente. Si alguien se pregunta quién estaba equivocado, si el Desafiante o yo, la respuesta es: los dos.

[3] Es decir, por Rubenman.

Punto 1:	$q - 6x$
Punto 2:	$4 - 4y$
Punto M:	$4 - 2z$

En el último viaje salimos también con 4 y vamos igualando cada tramo a lo almacenado, de forma que $x = q/7$, $y = 4/5$, y el último tramo z hasta M es 4/3. Sumando los tres valores debemos (ahora sí) obtener 2,4. Esto nos da que $q = 1{,}866666...$ y $x = 0{,}266666...$, lo que da un consumo total de $12 + q = 13{,}86666$ uc (346,6666 litros). Los puntos, por supuesto, quedan en estas posiciones, con las distancias x e y en proporción de 1 a 4:

Punto 1:	$0{,}26666$ uc $= 66{,}6666$ Km
Punto 2:	$0{,}26666 + 4/5$ uc $= 266{,}6666$ Km
Punto M:	$2{,}4$ uc $= 600$ Km

La organización me comunica que es correcto, que esa es la cifra buscada, pero sigue sin gustarme mi forma de encontrarla.

Es verdad que el consumo final es más sensible al valor de x que al de y (debido a su mayor coeficiente), pero me gustaría haber demostrado que un ahorro correctamente ponderado entre los dos primeros viajes no habría podido superar nunca el ahorro único en el primero. No dudo de que esa cantidad dicha sea la mínima posible, pero me queda la sensación desagradable de no haber intentado, ni mucho menos demostrado que no se pueda mejorar ahorrando de otra forma.

También me he quedado con las ganas de intentar estrategias de repostaje que no necesiten volver a la salida para el último viaje, y aunque estoy seguro de que es una idea absurda y fácil de descartar, no he tenido tiempo/ganas/claridad de ideas para hacerlo, y por todo ello no puedo decir que haya demostrado que la cifra encontrada sea realmente la mínima. Sólo puedo decir que es la mínima que he encontrado.

No le echo la culpa a la falta de tiempo. Hemos tenido de sobra, así que la culpa es mía, por mi falta de lucidez y por dejarlo todo para el último momento, en el que siempre pasa algo que impide trabajar. Me suspendo a mí mismo porque no sólo he necesitado una pequeña ayuda, sino que considero que no he acabado.