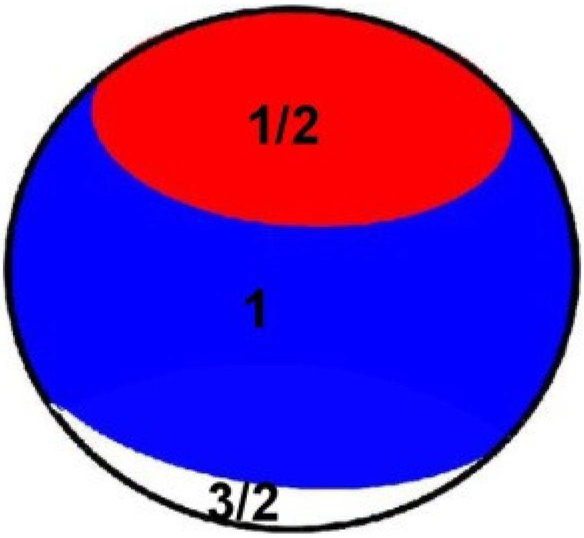
La pelota (Dospew)

Aburridos del bote previsible de las pelotas al uso han ideado una pelota de compartimentos estancos: **Cilindro interior**, **2 casquetes esféricos iguales** y el **cinturón** que completa la pelota-esfera.

Se dispone de un material gelatinoso en colores y densidades distintos en latas de 400 c^3: Negro (1/3 g/c^3), Blanco (3/2 g/c^3), Rojo (1/2 g/c^3) y azul (1 g/c^3)

Se rellena el tronco cilíndrico con **material negro**, un casquete con **material blanco** y el otro con **material rojo**, finalmente se rellena el cinturón con **material azul**, del que empleamos la mitad de la lata.



La razón altura / anchura ó diámetro del cilindro coincide, en valor, con la raíz cuadrada de la densidad de su material de relleno**.**

¿Cuánto pesa la pelota?

Solución

Los parámetros que voy a usar son R:radio de la pelota, r:radio del cilindro, H:altura del cilindro y h:altura de los casquetes.

La altura total es $H+2h=2R$.

Por el teorema de Pitágoras $r^2+(R-h)^2=R^2$.

Los volúmenes involucrados son el de la esfera $Ve=4/3\ \pi R^3$, el del cilindro $Vc=\pi r^2 H$, el de los casquetes $Vq=1/3\ \pi h^2(3R-h)$ y el del cinturón Vg. Se cumple que $Ve=Vc+2Vq+Vg$.

Nos dicen que $H/2r=1/\sqrt{3}$. Por tanto $H=r\sqrt{(4/3)}$ y $r=H\sqrt{(3/4)}$.

Desarrollo $r^2+(R-h)^2=R^2$: $r^2+R^2+h^2-2Rh=R^2$; $r^2=2Rh-h^2$.

Ahora desarrollo $H+2h=2R$: $H=2R-2h$; $r\sqrt{(4/3)}=2R-2h$; $r/\sqrt{3}=R-h$; $r^2=3(R-h)^2=3R^2+3h^2-6Rh$.

Igualo r^2 en las dos fórmulas: $2Rh-h^2=3R^2+3h^2-6Rh$; $4h^2-8Rh+3R^2=0$.

Resuelvo h en la ecuación de segundo grado: $h=(8R\pm\sqrt{(64R^2-48R^2)})/8=R\pm R/2$.

Como h no puede ser mayor que R, la única solución válida es $h=R-R/2=R/2$.

Resuelvo H: $H=2R-2h=2R-R=R$.

Calculo los volúmenes:

$Ve=4/3\ \pi R^3$

$Vc=\pi r^2 H=\pi(H\sqrt{(3/4)})^2 H=3/4\ \pi H^3=3/4\ \pi R^3$

$Vq=1/3\ \pi h^2(3R-h)=1/3\ \pi(R/2)^2(3R-R/2)=1/3\ \pi R^2/4\ 5/2R=5/24\ \pi R^3$

$Vg=Ve-Vc-2Vq=(4/3-3/4-10/24)\ \pi R^3=1/6\ \pi R^3$

Nos dicen que Vg=200cc. De ahí $1/6\ \pi R^3=200$cc y $\pi R^3=1200$cc. Calculo los volúmenes:

$Vc=3/4\ \pi R^3=3/4\ 1200=900$cc

$Vq=5/24\ \pi R^3=5/24\ 1200=250$cc

Para hallar el peso multiplico cada volumen por su densidad:

$M=Vc/3+3Vq/2+Vq/2+Vg=900/3+3*250/2+250/2+200=300+375+125+200=1000$ g.

La pelota pesa 1 kg.

Mmonchi