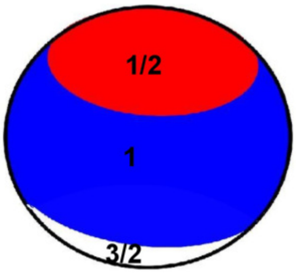
Solución al Desafío 180 (Dospew)

La pelota

Paquito Superpanzeta
Club Pitagóricos, 2 de junio de 2017



Enunciado

Aburridos del bote previsible de las pelotas al uso han ideado una pelota de compartimentos estancos: ***Cilindro interior, 2 casquetes esféricos iguales*** *y el* ***cinturón*** *que completa la pelota-esfera.*

Se dispone de un material gelatinoso en colores y densidades distintos en latas de $400c^3$*: Negro (1/3 g/*c^3*), Blanco (3/2 g/*c^3*), Rojo (1/2 g/*c^3*) y azul (1 g/*c^3*).*

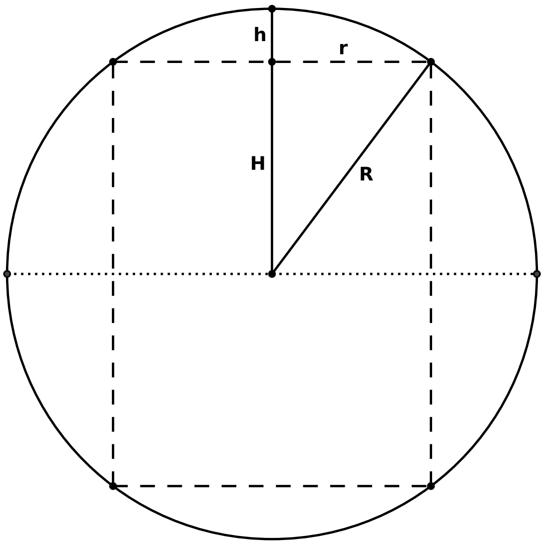
Se rellena el tronco cilíndrico con ***material negro****, un casquete con* ***material blanco*** *y el otro con* ***material rojo****, finalmente se rellena el cinturón con* ***material azul****, del que empleamos la mitad de la lata.*

La razón altura / anchura ó diámetro del cilindro coincide, en valor, con la raíz cuadrada de la densidad de su material de relleno.

¿Cuánto pesa la pelota?

Solución

Empezaremos con una "radiografía" de la pelota, con sus variables importantes.



En el diagrama, he llamado h y r a la altura y radio del casquete esférico, H a la altura de medio cilindro y R al radio de la esfera. El perfil del cilindro interior es el recuadro discontinuo.

Nos dicen que $2H$ (altura del cilindro) dividida por $2r$ (diámetro del cilindro) es igual a la raíz cuadrada de $\frac{1}{3}$. De aquí obtenemos directamente que

$$r = H\sqrt{3}$$

Pero como se ve en el diagrama, $R = H + h$, y además, r, H y R están relacionados por Pitágoras, así que podremos expresar todas las variables por medio de una sola, por ejemplo, H.

De Pitágoras y de la ecuación anterior obtenemos que

$$R^2 = H^2 + 3H^2 = 4H^2$$

O lo que es lo mismo, $R = 2H$, lo que nos dice que $h = H$.

Empezaremos por el volumen de un casquete esférico, que es:

$$V_{cas} = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$$

Cambiando las variables a H, la fórmula se convierte en

$$V_{cas} = \frac{\pi h^2}{3}(6H - H) = \frac{5\pi H^3}{3}$$

En cuanto al cilindro, su volumen es:

$$V_{cil} = 2\pi r^2 H$$

Pasando el radio a su valor en H, nos queda

$$V_{cil} = 6\pi H^3$$

Para el cinturón, haré uso de que su volumen es el de la esfera menos los casquetes y el cilindro. Como la partición de la esfera es geométricamente simétrica respecto de su ecuador, podemos usar media esfera, un solo casquete y medio cilindro.

El volumen de media esfera será:

$$V_{semiesfera} = \frac{2\pi R^3}{3}$$

En forma de H

$$V_{semiesfera} = \frac{16\pi H^3}{3}$$

Restando a la semiesfera el casquete y medio cilindro obtendremos medio cinturón:

$$V_{cin/2} = \frac{16\pi H^3}{3} - \frac{5\pi H^3}{3} - \frac{9\pi H^3}{3} = \frac{2\pi H^3}{3}$$

Pero el enunciado nos dice que el cinturón se llena con media lata de 400 c.c., luego medio cinturón se llenará con la cuarta parte de una lata, 100 c.c.. Igualar la expresión anterior a 100 nos proporciona el valor de H.

$$H = \sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}$$

Y ya solo queda calcular los volúmenes finales, multiplicarlos por sus densidades y sumarlo todo.

$$V_{cas} = \frac{5\pi \frac{150}{\pi}}{3} = 250 c.c.$$
$$V_{cil} = 6\pi \frac{150}{\pi} = 900 c.c.$$

En cuanto al volumen del cinturón, ya sabemos que es de media lata, 200 c.c..

Los pesos serán:

- 1 casquete de densidad $\frac{1}{2}$: $250 \times \frac{1}{2} = 125$ g.
- 1 casquete de densidad $\frac{3}{2}$: $250 \times \frac{3}{2} = 375$ g.
- 1 cilindro de densidad $\frac{1}{3}$: $900 \times \frac{1}{3} = 300$ g.
- 1 cinturón de densidad 1: $200 \times 1 = 200$ g.

Peso total $= 1000$ g. para una pelotita de radio $R \approx 7{,}25$ cm. es mucho peso. Quizá sirva para jugar a los bolos, pero me imagino que la disparidad de densidades hará que ruede de una forma poco apropiada para conseguir muchos strikes.