Salvando a la Cabra (Superpanzeta)

Unos extraterrestres malvados han secuestrado a mi Cabra y la han encerrado en una celda de su nave espacial cuya puerta se abre por medio de un pulsador.
Lo malo es que hay dos pulsadores iguales, uno rotulado como “SI” y otro como “NO”.
Si se pulsa el botón correcto, la puerta se abre, y la prisionera es libre de marcharse.
Si se pulsa el botón incorrecto, entra Justin Bieber y le da un concierto a la Cabra.
El desafío consiste en ayudar a mi Cabra a escapar averiguando qué botón hay que pulsar.
En el suelo de la celda hay unas instrucciones, una pantalla táctil cuadrada dividida en 25 casillas (5 filas y 5 columnas) y un talonario muy gordo con 10 mil millones de boletos de lotería numerados de arriba a abajo desde el 9999999999 hasta el 0000000000.
Este es un resumen de las instrucciones:
En cada casilla de la pantalla táctil se puede ver un contador a 0. Cada vez que se toca una casilla, su contador se incrementa en 1, pero también lo harán los contadores de las casillas adyacentes (no en diagonal). El objetivo es pulsar una o más casillas hasta que las 25 muestren el mismo número mayor que 0, usando en el proceso la mínima cantidad de pulsaciones. Las pulsaciones que se den a las casillas del tablero deben ser simétricas respecto al centro.
Una vez igualado el tablero, hay que convertir el número que muestren las casillas a base 16.
El número así obtenido deberá tener 3 dígitos. En caso necesario, habrá que completarlo con uno o más ceros por la izquierda.
Ahora hay que tomar el primer dígito, interpretarlo como si fuera decimal, y arrancar del talonario de lotería todos los boletos que lo contengan. Y lo mismo para el segundo y tercer dígito.
Lo siguiente es encontrar el boleto que haya quedado en cierta posición del talonario (contando de arriba a abajo). Esta posición deberá ser igual a la de la matrícula de la nave espacial.
Como en la cabecera no se ve bien, aquí está la matrícula ampliada, que habrá que convertir en un número entero:

$$\underline{cc\lambda wwwdc\gamma\lambda}wd\chi\lambda\iota$$

Para poder interpretar el número de la matrícula, habrá que hacer antes un par de transformaciones sencillas. El resultado final será la posición del boleto de lotería que buscamos.
Luego de encontrado el boleto correspondiente, hay que dividir su número (no su posición) por 2, y hacerle la raíz cúbica a lo que salga. En caso de que estas operaciones no sean exactas, se tomará en cada caso el entero más cercano redondeando hacia abajo. El resultado será el número final.
El destino de la prisionera dependerá del número final obtenido y de la siguiente pregunta. La respuesta deberá ser “SI” o “NO”, y habrá que pulsar el botón correspondiente.
Pregunta final:
Considérense 3 tres progresiones aritméticas infinitas desconocidas.
Juntando los términos de las tres series, los números del 1 al 8 aparecen al menos una vez cada uno.
¿Contiene alguna de las series el número final?
¿Sí o no?
NOTA:
No os preocupéis, es un entretenimiento veraniego y sin sustancia. Obviamente, no vale adivinar, pero se permite utilizar el Teorema de Pitágoras.

SOLUCIÓN:

Como el número de veces que se aprieta cada pulsador debe ser simétrico respecto al centro podemos representar con letras las pulsaciones:

ABCBA
BDEDB
CEFEC
BDEDB
ABCBA

Llamamos K al número que queremos obtener en todos los pulsadores, así que se deben cumplir las siguientes ecuaciones:

A+2B=K
A+B+C+D=K
2B+C+E=K
2B+D+2E=K
C+2D+E+F=K
4E+F=K

Al resolverlo el sistema queda así:

A=4/11 K
B=7/22 K
C=5/22 K
D=1/11 K
E=3/22 K
F=5/11 K

La solución menor, descartando K=0, es K=22. 22 en base 16 es 016, el número buscado.

Ahora viene el problema de la matrícula: ccλwwwdcγλwdχλι. Primero se pasa a mayúsculas, CCΛWWWDCΓΛWDXΛI y después se le da la vuelta, CCVMMMDCLVMDXVI. El número de la matrícula es 208 656 516.

Como en el talonario solo quedan siete números (2,3,4,5,7,8,9) para buscar el que ocupa una posición dada lo más rápido es pasar el número de orden a base 7: 208656516_7=5112360015. Como el primer número no es 0, sino 9 999 999 999, hay que buscar la posición correspondiente al número anterior de modo que 208656515_7=5112360014. Así que buscamos el número que ocupa la posición 5 112 360 014 (en base 7). Para transformar la posición en el número nos fijamos en que en lugar de los números de base 7 (0,1,2,3,4,5,6) tenemos los dígitos que no hemos arrancado (9,8,7,5,4,3,2). Transformamos los números del primer grupo en los del segundo y tenemos el boleto: 3 887 529 984. Dividimos entre 2 y sale 1 943 764 992, y al hacer la raíz cúbica queda 1248, el número final.

Tenemos tres progresiones aritméticas con constantes k, l y m ordenadas de menor a mayor. Averiguamos qué progresiones cubren entre las tres todos los números reales: (1,l,m), (2,2,m), (2,4,4), (3,3,3). Se entiende que cuando hay dos progresiones con la misma constante no coinciden.

Es fácil ver por qué no hay más: si k es 4 no pueden cubrir todo, ya que si la primera tiene el valor n, la segunda n+1 y la tercera n+2, los números n-1 y n+3 no están en ninguna; si k y l son 3 y m es mayor ocurre lo mismo, pues están n y n+3, n+1 y n+4, pero si está n+2 es n+5 la que no está; si k es 3, están n y n+3, pero al estar n+1 y n+2 no están n+4 y n+5 a la vez; y si k es 2, los números que deben cubrir l y m tienen todos la misma paridad, por lo que si estos son impares no pueden ser mayores que 3, lo cual solo permite las soluciones conocidas (2,2,m) y (2,4,4).

Ya sabemos las progresiones que no cubren el total de números. ¿Es posible que alguna de ellas tenga los dígitos del 1 al 8? Vamos a analizar cada caso:

- k es 4 o mayor. Si tenemos tres números consecutivos son de tres series diferentes y el cuarto no pertenece a ninguna. No puede haber cuatro números consecutivos, así que no puede haber ocho.
- k y l son 3 y m es mayor. Si tenemos dos números consecutivos de las dos primeras series y el tercero es de la tercera serie, el cuarto y el quinto son de las dos primeras pero el sexto no es de ninguna de ellas. No puede haber más de cinco números consecutivos.
- k es 3 y l y m son mayores. Tenemos n y n+3 en la misma serie. Si tenemos n+1 y n+2 de las otras dos series, no tenemos ni n-1 ni n+4. No puede haber más de cuatro números consecutivos.
- k es 2 y l es 3. Tenemos n, n+2, n+4 y n+6 de la primera serie y n+1 y n+7 de la segunda. n+3 y n+5 no pueden pertenecer a la misma serie porque tendría k=2, así que no puede haber ocho números consecutivos.
- k es 2 y l es 4. Tenemos n, n+2, n+4 y n+6 de la primera serie y n+1 y n+5 de la segunda. Si n+3 es de la tercera, no tenemos ni n-1 ni n+7, así que no puede haber más de siete números consecutivos.

No puede haber ninguna combinación de tres progresiones aritméticas que tengan los números del uno al ocho y a la vez dejen números sin cubrir. Por tanto alguna de las tres progresiones desconocidas contiene el 1248.

Así que pulsamos el SÍ y salvamos a la cabra.

Mmonchi