Solución al Desafío 181 (Superpanzeta)

Salvando a la Cabra

Paquito Superpanzeta
Club Pitagóricos, 26 de junio de 2017

Enunciado

Unos extraterrestres malvados han secuestrado a mi Cabra y la han encerrado en una celda de su nave espacial cuya puerta se abre por medio de un pulsador.

Lo malo es que hay dos pulsadores iguales, uno rotulado como "SI" y otro como "NO". Si se pulsa el botón correcto, la puerta se abre, y la prisionera es libre de marcharse. Si se pulsa el botón incorrecto, entra Justin Bieber y le da un concierto a la Cabra.

El desafío consiste en ayudar a mi Cabra a escapar averiguando qué botón hay que pulsar. En el suelo de la celda hay unas instrucciones, una pantalla táctil cuadrada dividida en 25 casillas (5 filas y 5 columnas) y un talonario muy gordo con 10 mil millones de boletos de lotería numerados de arriba a abajo desde el 9999999999 hasta el 0000000000.

Este es un resumen de las instrucciones:

En cada casilla de la pantalla táctil se puede ver un contador a 0. Cada vez que se toca una casilla, su contador se incrementa en 1, pero también lo harán los contadores de las casillas adyacentes (no en diagonal).

El objetivo es pulsar una o más casillas hasta que las 25 muestren el mismo número mayor que 0, usando en el proceso la mínima cantidad de pulsaciones. Las pulsaciones que se den a las casillas del tablero deben ser simétricas respecto al centro.

Una vez igualado el tablero, hay que convertir el número que muestren las casillas a base 16. El número así obtenido deberá tener 3 dígitos. En caso necesario, habrá que completarlo con uno o más ceros por la izquierda.

Ahora hay que tomar el primer dígito, interpretarlo como si fuera decimal, y arrancar del talonario de lotería todos los boletos que lo contengan. Y lo mismo para el segundo y tercer dígito.

Lo siguiente es encontrar el boleto que haya quedado en cierta posición del talonario (contando de arriba a abajo). Esta posición deberá ser igual a la de la matrícula de la nave espacial. Como en la cabecera no se ve bien, aquí está la matrícula ampliada, que habrá que convertir en un número entero:

$$\underline{\underline{cc}\lambda www dc\gamma\lambda}wd\chi\lambda\iota$$

Para poder interpretar el número de la matrícula, habrá que hacer antes un par de transformaciones sencillas. El resultado final será la posición del boleto de lotería que buscamos.

Luego de encontrado el boleto correspondiente, hay que dividir su número (no su posición) por 2, y hacerle la raíz cúbica a lo que salga. En caso de que estas operaciones no sean exactas, se tomará en cada caso el entero más cercano redondeando hacia abajo. El resultado será el número final.

El destino de la prisionera dependerá del número final obtenido y de la siguiente pregunta. La respuesta deberá ser "SI" o "NO", y habrá que pulsar el botón correspondiente.

Pregunta final:

Considérense 3 tres progresiones aritméticas infinitas desconocidas. Juntando los términos de las tres series, los números del 1 al 8 aparecen al menos una vez cada uno. ¿Contiene alguna de las series el número final? ¿Sí o no?

NOTA: No os preocupéis, es un entretenimiento veraniego y sin sustancia. Obviamente, no vale adivinar, pero se permite utilizar el Teorema de Pitágoras.

Solución

El tablero

Buscar una solución simétrica es sin duda más sencillo que hacerlo con una asimétrica. Sobre todo si, como es mi caso, no se te ocurre que la solución asimétrica pueda existir. Gracias a Mmonchi, ahora veo que es posible, y de ahí la modificación del enunciado.

La solución simétrica no encierra ninguna dificultad. Poniendo nombre a las casillas de forma que las casillas simétricas se llamen igual llenaremos el casillero con sólo 6 variables.

A	B	C	B	A
B	D	E	D	B
C	E	F	E	C
B	D	E	D	B
A	B	C	B	A

Cada letra corresponderá al número de veces que se pulsa directamente cada casilla. Para obtener la cuenta final de cada casilla basta con ir planteando ecuaciones sencillas. Por ejemplo, la cuenta final de las casillas de las esquinas será A+2B, el número de veces que se pulsan la esquina, A, más dos veces el número de veces que se pulsa la casilla adyacente, B.

Para las casillas B, la cuenta final será A+B+C+D, para las C, C+2B+E, y así con todas. Como todas las cuentas finales deben ser la misma, igualamos todas las expresiones y vamos simplificando, eliminando variables. Me ahorro los detalles porque son triviales. Lo más sencillo es dejarlo todo en función de la variable D. El resultado es el siguiente:

4D	7D/2	5D/2	7D/2	4D
7D/2	D	3D/2	D	7D/2
5D/2	3D/2	5D	3D/2	5D/2
7D/2	D	3D/2	D	7D/2
4D	7D/2	5D/2	7D/2	4D

La presencia de varias casillas con denominador 2 nos dice que D debe ser par. Como buscamos la mínima suma posible, daremos a D el menor valor par posible, 2. Las pulsaciones de las casillas quedan entonces así:

8	7	5	7	8
7	2	3	2	7
5	3	10	3	5
7	2	3	2	7
8	7	5	7	8

La cuenta final para cada casilla será pues, 22. Convirtiendo ese número a hexadecimal de 3 dígitos obtenemos 016 y pasamos a la siguiente tontería de la serie.

La matrícula

Esta es, con seguridad, la tontería más gorda de las que se compone este Desatino. No estaba muy seguro de que hiciera falta, pero no descartaba dar una pista, cosa que al final hice. La pista era la palabra **minúscula**.

Probablemente, hubiera sido mejor incluirla directamente en el enunciado aprovechando que tenía que ampliar la imagen de la matrícula. Podría haber dicho que era "demasiado minúscula" o algo así, pero no lo hice.

Sea como sea, la primera transformación de la que hablaba era textual. La matrícula consta de símbolos de 2 alfabetos diferentes (latino y griego), y de un par de rayas. Todas las letras son minúsculas.

$$\underline{\underline{cc}\lambda wwwdc\gamma\lambda}wd\chi\lambda\iota$$

Si las pasamos a mayúsculas, cuidando de identificar bien los alfabetos[1] obtendremos algo que es prácticamente imposible de confundir: un número romano reflejado verticalmente.

$$\underline{\underline{\mathsf{CC}}\mathsf{\Lambda WWWDC\Gamma\Lambda}}\mathsf{WDX\Lambda I}$$

Y esa es la segunda transformación, una reflexión vertical.

$$\overline{\overline{\mathsf{CC}}\mathsf{VMMMDCLV}}\mathsf{MDXVI}$$

La interpretación es estándar y probablemente la representación también lo sea[2], aunque a mí nunca se me hubiera ocurrido representarlo de ese modo. Sea como sea, no hay duda posible. El número de la matrícula es el 208656516, y pasamos a la siguiente tontería.

El boleto

De la primera parte ya sabemos que hay que eliminar los boletos que contengan los dígitos 0, 1 y 6, pero imaginemos por un momento que no hay que eliminar ninguno.

[1] La única "dificultad" estriba en no confundir las w con ω. En este último caso, al pasar a mayúsculas obtendríamos Ω, lo que echaría a perder el número.

[2] Así es como codifica el número Wolfram|Alpha.

Como los boletos están ordenados de mayor a menor, para encontrar el que hay en una determinada posición bastaría con restar el número de posición al total de boletos. Sin embargo, al faltar los boletos que contienen 3 dígitos, esta resta no funciona.

Fijémonos entonces en la última columna, la de las unidades. Al ir bajando por los boletos, nos encontraremos con dígitos descendentes que forman grupos de 7 (ya que faltan 3 dígitos). Cuando lleguemos al boleto en la posición buscada, habremos completado un cierto número de septenas y nos quedaremos en algún dígito cuya posición en la septena corresponderá al resto de dividir el total de boletos por 7.

Para la columna de las decenas, lo mismo. Habrá una cierta cantidad de septenas completas, y un resto. La cantidad de septenas completas será 7 veces inferior a la de las septenas completas de las unidades. Y lo mismo para todas las columnas.

Lo que nos interesa es entonces el resto de cada división sucesiva por 7. Lo que equivale a decir que tenemos que pasar la posición buscada a base 7. En nuestro caso, 208656516 en base 7 es 5112360015.

Restemos entonces: 10000000000-5112360015=4887639985.

Ese sería el número del boleto en posición 208656516 si todos los dígitos fuesen válidos, pero no lo son. Para cada dígito prohibido de mayor a menor, si un dígito de la solución es igual o menor a él, quiere decir que faltará un dígito en su sitio o por encima de su septena y el efecto es que la columna subirá una posición para rellenar el hueco. Esto equivale a restar 1 al dígito afectado, ya que entra en su lugar el dígito inferior en la columna.

En nuestro caso, partimos del 4887639985: El primer dígito prohibido de mayor a menor es el 6. Reduzcamos en 1 todos los dígitos iguales o menores a 6, lo que nos deja 3887529984. El siguiente dígito prohibido es el 1. No hay iguales o inferiores en 3887529984, así que no hacemos nada. El siguiente dígito prohibido es el 0. No hay iguales o inferiores en 3887529984, así que no hacemos nada. La solución es 3887529984.

NOTA: En este caso no ha hecho falta, pero el 0 tiene un tratamiento diferente. Si al restar 1 a uno de los dígitos entramos en negativos, debemos quedarnos en 0, sin restar. Finalmente, si la solución final contiene 0s y están prohibidos, hay que sustituirlos por el primer dígito libre no prohibido de menor a mayor. Por ejemplo, si los prohibidos son 0,1 y 6, habría que sustituir los 0s por 2s.

Por supuesto, este ajuste "aritmético" de restas 1 es una complicación innecesaria. Es más sencillo sustituir directamente los símbolos en la posición base 7 como habéis hecho varios de vosotros, pero no se me ocurrió. En cualquier caso, este sistema también funciona.

Ahora hay que dividir 3887529984 por 2 y hacer la raíz cúbica, lo que nos deja exactamente 1248 y pasamos a la tontería final.

Las progresiones

Como ya sabréis a estas alturas, todos los enteros aparecen en alguna u otra de las progresiones, pero como yo no me di cuenta, os pongo la solución que tenía, y que es específica para el 1248.

Supongamos que **ninguna** de las series contiene al 1248.

1248 - 8 = 1240, que es múltiplo de 1,2,4 y 5.

Fijémonos en una serie que contenga un 8. La llamaremos serie Primera. Si esta serie contuviese también el 7, entonces su diferencia sería 1 (o submúltiplo de 1), y la presencia del 1248 sería inevitable. Luego esta serie no contiene el 7. Si esta serie contuviese también el 6, entonces su diferencia sería 2 (o submúltiplo de 2), y la presencia del 1248 sería inevitable. Luego esta serie no contiene el 6. Si esta serie contuviese también el 4, entonces su diferencia sería 4 (o submúltiplo de 4), y la presencia del 1248 sería inevitable. Luego esta serie no contiene el 4. Si esta serie contuviese también el 3, entonces su diferencia sería 5 (o submúltiplo de 5), y la presencia del 1248 sería inevitable. Luego esta serie no contiene el 3.

1248 - 6 = 1242, que es múltiplo de 1,2,3. Por un razonamiento análogo, cualquier serie que contenga un 6 (que llamaremos serie Segunda) no podrá contener ni al 3, ni al 4, ni al 5. Ni tampoco (por el razonamiento previo) al 8.

Así que el 3 y el 4 deberán estar en la serie Tercera.

Pero si tenemos 3 y 4 en esta serie, la diferencia será 1 (o submúltiplo de 1), y el 1248 tendrá que aparecer.

En conclusión, 3 y 4 no podrán estar en ninguna de las series, lo que contradice el enunciado. Así que la suposición inicial debe ser falsa. El 1248 aparecerá inexorablemente, y la respuesta final a todo es **SÍ**.